# Prüfungsfach: Theoretische Grundlagen II , MKI

Blatt 1

**Fakultät Informatik** **Hochschule Reutlingen**

**Saal: Aula, Platz Nr.:** ..................... Datum 28.01.2009

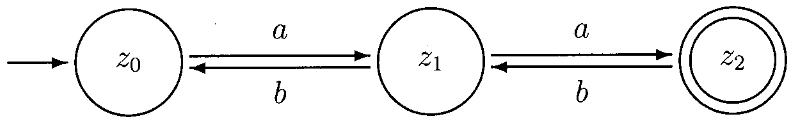
**Name:** Mustermann **Vorname:** .............................. **Matr.-Nr.:** ..............................

Aufgaben von Dr. Reinhardt im Wintersemester 2008/2009.
**Hilfsmittel: Taschenrechner und sämtliche Unterlagen (Skripte, Bücher)**
Bitte beantworten Sie die Fragen bzw. ergänzen Sie den Text auf den gepunkteten Linien.
Viel Erfolg!

---

*Aufgabe 1:* **(Endliche Automaten/ reguläre Grammatiken /reguläre Ausdrücke)**
(5+1+3+4+3+5 Punkte)

Gegeben sei der folgende nichtdeterministische endliche Automat:



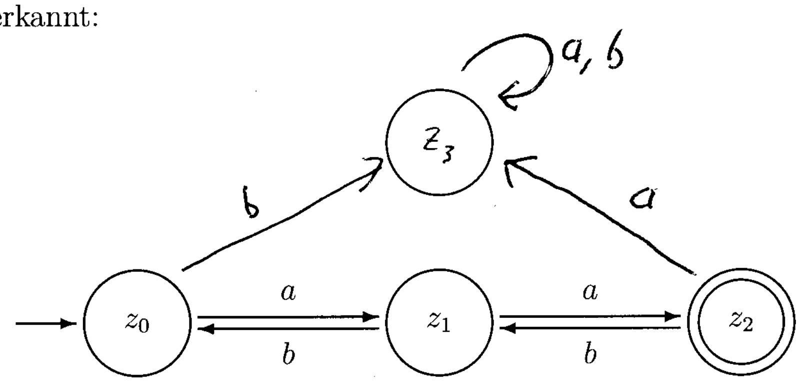

(a) Mathematisch beschrieben wird der Automat als $M = (Z, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit der Menge der Zustände $Z = \{z_0, z_1, z_2\}$, der Menge der Endzustände $E = \{z_2\}$ und der Übergangsfunktion $\delta$ mit $\delta(z_0, a) = \{z_1\}, \delta(z_1, a) = \{z_2\}, \delta(z_2, a) = \{\}$, $\delta(z_0, b) = \{\}$, $\delta(z_1, b) = \{z_0\}$, $\delta(z_2, b) = \{z_1\}$.

(b) Nach Lesen des Eingabewortes *abaabba* befindet sich der Automat im Zustand $z_1$

(c) Der Automat akzeptiert zum Beispiel die folgenden 7 Wörter: *aa*, *abaa*, *aababa*, *abababaa*, aaba, ababaa, aabababa.

(d) Die Sprache $L(M) = L(G)$ wird auch erzeugt durch die folgende Grammatik $G = (\{S, Z_1, Z_2\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Produktionsregeln
$P = \{S \to aZ_1, Z_1 \to aZ_2, Z_1 \to bS, Z_1 \to a, Z_2 \to bZ_1\}$.

(e) Die gleiche Sprache wird auch von folgendem deterministischen endlichen Automaten erkannt:




(Fehlende Übergänge sind zu ergänzen.)

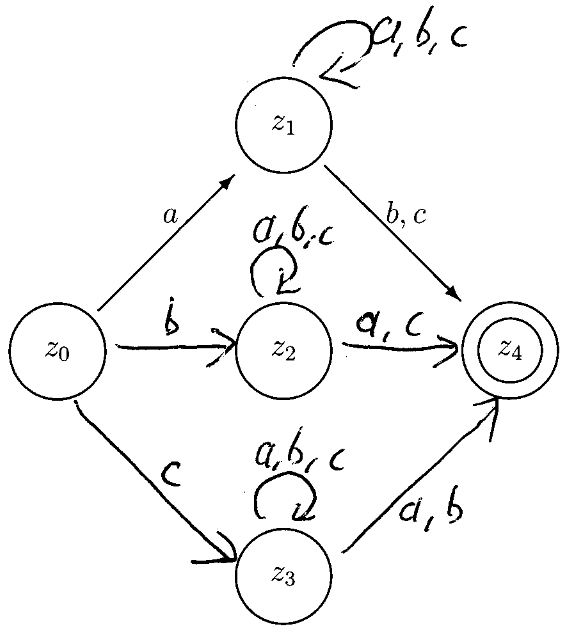
(f) Die gleiche Sprache wird auch vom regulären Ausdruck $a(ab|ba)^*a$ erzeugt.

*Aufgabe 2:* **(Reguläre Sprachen)** (5+4+3 Punkte)

Sei $L$ die Sprache der Wörter über dem Alphabet $\{a, b, c\}$, bei denen der erste und der letzte Buchstabe verschieden sind.

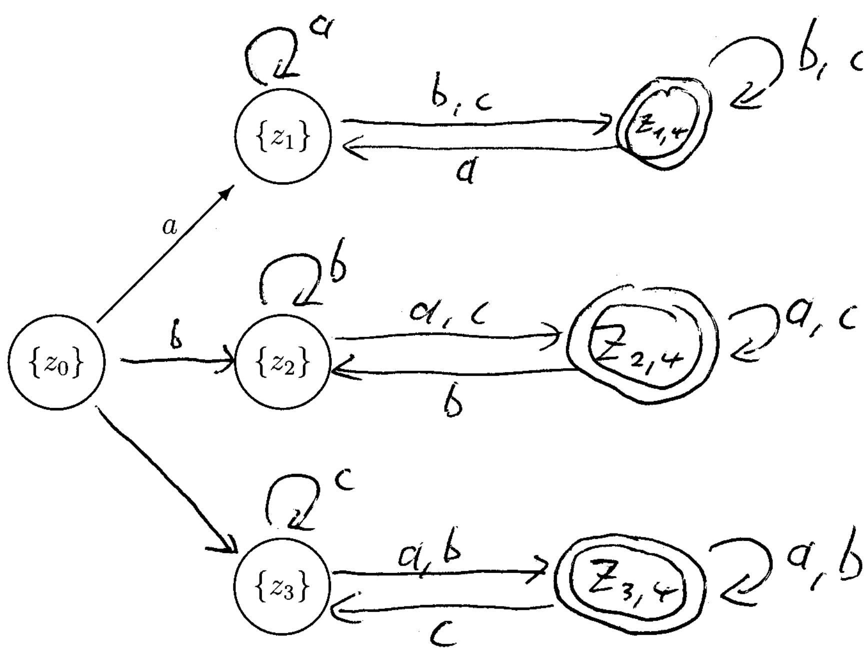
(a) Der reguläre Ausdruck für $L$ hat die Form
$a(a \cup b \cup c)^*(b \cup c) \cup$ $b(a \cup b \cup c)^*(a \cup c) \cup c(a \cup b \cup c)^*(a \cup b)$

(b) Ein nichtdeterministischer Automat für $L$ hat die Form



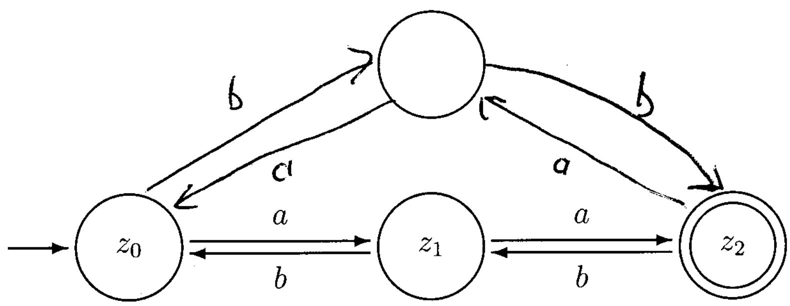

(Fehlende Übergänge sind zu ergänzen.)

(c) Ein deterministischer Automat für $L$ hat die Form




(Fehlende Zustände und Übergänge sind zu ergänzen.)

*Aufgabe 3:* **(Endliche Automaten)** (4 Punkte)
Die Sprache $\{w \in \Sigma^* \mid (\#_a(w) - \#_b(w)) \; mod \; 4 = 2\}$ (Es ist $\#_a(w)$ die Anzahl der Vorkommen von $a$ in $w$ und '*mod*' die modulo-Operation.) wird von folgendem deterministischen endlichen Automaten erkannt:




(Fehlende Übergänge sind zu ergänzen.)

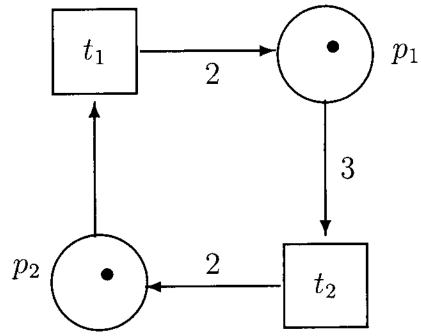
*Aufgabe 4:* **(Kontextfreie Sprachen)** (6 Punkte)
Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Produktionsregeln $P = \{S \underset{1}{\rightarrow} aA, S \underset{2}{\rightarrow} aaA, A \underset{3}{\rightarrow} Sb, A \underset{4}{\rightarrow} b\}$. Kann das Wort *aaaaabbb* erzeugt werden? Ja

Begründung: $S \underset{2}{\Rightarrow} aaA \underset{3}{\Rightarrow} aaSb \underset{1}{\Rightarrow} aaaAb \underset{3}{\Rightarrow} aaaSbb$

$\underset{2}{\Rightarrow} aaaaaAbb \underset{4}{\Rightarrow} aaaaabbb$

Name: Mustermann Theoretische Grundlagen II , MKI Blatt 4

*Aufgabe 5:* **(Petrinetze)**
(2+4+2+2+2+2+4+5+3+5+4 Punkte)




Gegeben sei das links abgebildete Petrinetz $N = (P, T, F, W, K, M_0)$ mit der Anfangsmarkierung $M_0 = \binom{1}{1}$ und (zunächst) unbeschränkter Kapazität $K$ mit $K(p_1) = K(p_2) = \omega$.

(a) Die Menge der Plätze ist $P =$ $\{p_1, p_2\}$ und die Menge der Transitionen ist $T =$ $\{t_1, t_2\}$.

(b) Der Vorbereich von $t_1$ is $.t_1 =$ $\{p_2\}$, der Vorbereich von $p_1$ is $.p_1 =$ $\{t_1\}$, der Nachbereich von $t_1$ is $t_1. =$ $\{p_1\}$, der Nachbereich von $p_1$ is $p_1. =$ $\{t_2\}$.

(c) Die Inzidenzmatrix von $N$ ist $\underline{N} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(d) Ist $t_1$ $M_0$-aktiviert? Ja
Begründung: $M_0 \geq W(.,t_1)$, d.h. genug Marken vorhanden

(e) Ist $t_2$ $M_0$-aktiviert? Nein
Begründung: $M_0(p_1) = 1 < 3 = W(p_1, t_2)$, d.h. nicht genug auf $p_1$

(f) Nach dem ersten Schaltvorgang wird die Markierung $\binom{3}{0}$ erreicht.

(g) Ist $N$ beschränkt? Nein
Begründung: $M_0 [t_1\rangle \binom{3}{0} [t_2\rangle \binom{0}{2} [t_1\rangle \binom{2}{1}$ und $\binom{2}{1} > M_0$

(h) Ist $N$ reversibel? Nein Ist $N$ lebendig? Ja
Begründung: Der Wert "2x Anzahl Marken auf $p_1$ + 3 x Anzahl Marken auf $p_2$" wächst bei jedem Schaltvorgang monoton (damit nicht umkehrbar). $t_1$ kann immer durch Schalten von $t_2$ bzw $t_2$ durch Schalten von $t_1$ aktiviert werden.

(i) Sei $w \in T^*$ eine Schaltfolge mit $\#_{t_1}(w) = 27$ und $\#_{t_2}(w) = 16$, so gilt

$$M_0[w\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 27 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(j) Gelte $M_0[w'\rangle \binom{7}{2}$. Berechne $\#_{t_1}(w')$ und $\#_{t_2}(w')$

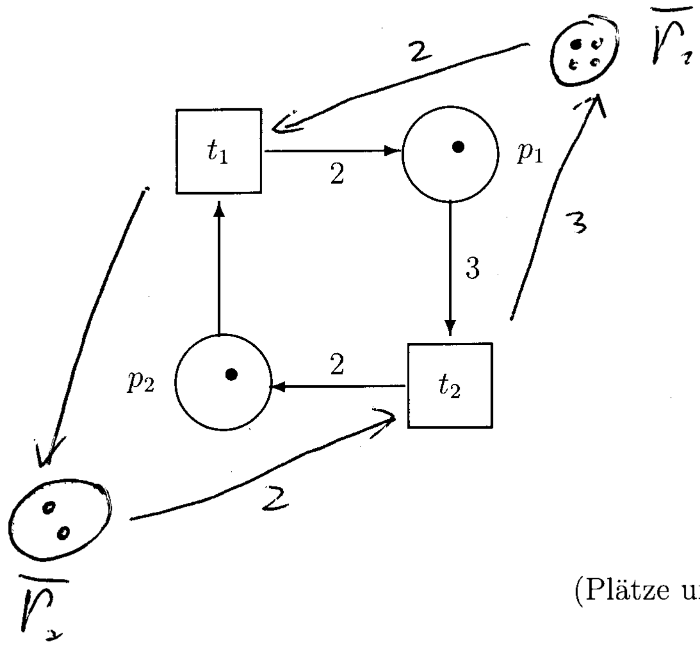
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$2x_1 - 3x_2 = 6 \qquad +2 \cdot z_2$$
$$-x_1 + 2x_2 = 1$$

$$x_2 = 8 = \#_{t_2}(w)$$

$$x_1 = 2 \cdot 8 - 1 = 15 = \#_{t_1}(w)$$

(k) Sei nun $K(p_1) = 5$ und $K(p_2) = 3$. Mache das Petrinetz kontaktfrei:




(Plätze und Kanten sind hinzuzufügen.)

*Aufgabe 6:* **(Lineare Algebra)** (6 Punkte)

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 13 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$ ist zu invertieren, Zwischenschritte sind anzugeben.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 13 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2z_1 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -3z_2 \\ \\ +2z_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -4z_3 \\ +3z_3 \\ x-1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 23 & -11 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -14 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Name: Mustermann Theoretische Grundlagen II , MKI Blatt 7

*Aufgabe 7:* **(Codierung)** (1+2+1+3+2+2 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Wahrscheinlichkeiten für das Alphabet $\{a, b, c\}$: $P(a) = 0,25$, $P(b) = 0,25$, $P(c) = 0,5$ und der Code $K$ mit $K(a) = 0$, $K(b) = 11$, $K(c) = 01$.

(a) Der Informationsgehalt von $b$ ist $i(b) = \log_2 \frac{1}{0{,}25} = 2$

(b) Die Entropie ist $H(\{a, b, c\}) = \underbrace{2 \times 0{,}25 \times \log_2 \frac{1}{0{,}25}}_{1} + \underbrace{0{,}5 \times \log_2 \frac{1}{0{,}5}}_{0{,}5} = 1{,}5$

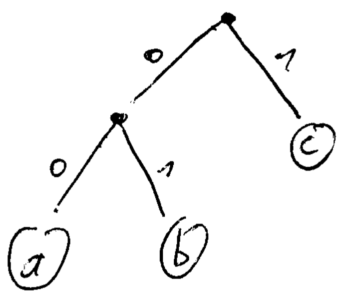
(c) Die Nachricht 01110 wird decodiert zu cba.

(d) Ist $K$ ein Präfixcode? Nein

Begründung: K(a) ist Präfix von K(c)

(e) Die mittlere Codewortlänge ist: $0{,}25 \times 1 + 0{,}25 \times 2 + 0{,}5 \times 2 = 1{,}75$

(f) Konstruiere dazu einen Fano-Code.




a → 00

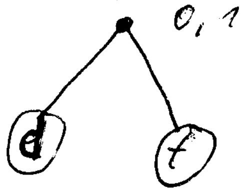
b → 01

c → 1

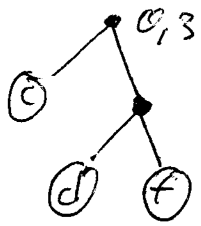
*Aufgabe 8:* **(Huffman-Codierung)** (5 Punkte)

Konstruiere einen Huffman-Code für das Alphabet $\{a, b, c, d, e, f\}$: $P(a) = 0,25$, $P(b) = 0,3$, $P(c) = 0,2$, $P(d) = 0,05$, $P(e) = 0,25$, $P(f) = 0,05$

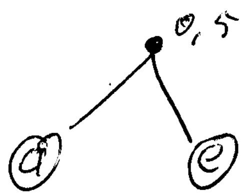
Schritt 1 :



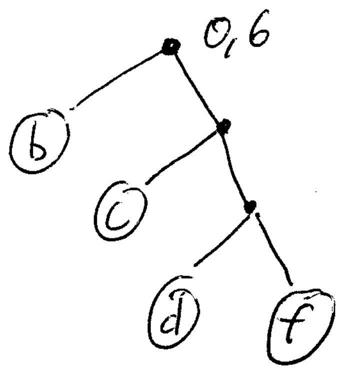
Schritt 2 :



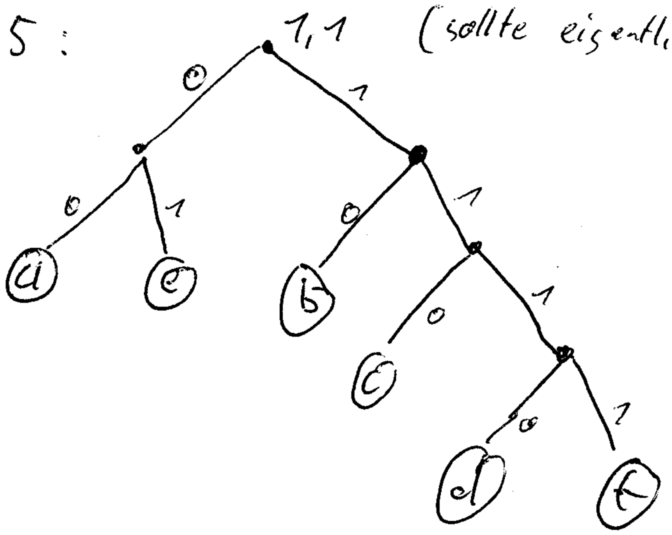
Schritt 3 :



Schritt 4 :



Schritt 5 : (sollte eigentlich 1 sein)



| | |
|---|---|
| a | 00 |
| b | 10 |
| c | 110 |
| d | 1110 |
| e | 01 |
| f | 1111 |